Kegel in der Bioinformatik

Annika Röhl

08.12.2010

Die Motivation zu diesem Thema stammt aus der Bioinformatik.
Man kann Systeme, die Stoffwechselwege beschreiben, als Gleichungssysteme auffassen. Diese beschreiben dann, in vereinfachter Form, spitze Kegel. Um die Lösungen dieser Gleichungssysteme zu erhalten, muss man die Randstrahlen oder Extremstrahlen dieser Kegel berechnen. Hierzu dient das sogenannte ‘"Doppelbeschreibungsverfahren"’.
Möchte man mehr über die Eigenschaften dieser Systeme erfahren, so kommt man nicht umhin, auch allgemeine Polyeder zu betrachten. Es werden hieru Eigenschaften von Polyedern und spitzen Kegeln erläutert, die dann ausgenutzt werden, um auch Extrempunkte und Extremstrahlen von nicht-spitzen Kegeln und Polytopen zu bestimmen.
Hierzu ein paar wichtige Definitionen und Anmerkungen:

Definition
Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Kegel**, wenn für alle $x \in K$ und alle $\lambda \geq 0$ gilt $\lambda x \in K$.

Definition
Ein **Polyeder** ist eine Menge $T \subset \mathbb{R}^n$ von Punkten, die eine endliche Anzahl von linearen Ungleichungen erfüllen:

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b,\ b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$$

Definition
Ein Vektor $r \in P$ heißt **Strahl** von P, wenn $r \neq \vec{0}$ und für alle $\lambda > 0$ gilt $\lambda r \in P$.

Definition
Ein Paar (A, R) von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, R \in \mathbb{R}^{n \times k}$ heißt **Doppelbeschreibungspaar** oder **DD-Paar** (von Double Description pair), wenn gilt:

$$Ax \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = R\lambda \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$$

Definition
Ein Punkt $x \in T$ heißt **Extrempunkt**, falls er sich nicht als echte konvexe Linearkombination zweier Punkte $x_1, x_2 \in T$ mit $x_1 \neq x_2$ darstellen lässt.

Definition
Eine **Fläche** eines Polyeders ist der Durchschnitt des Polyeder T mit einer Hyperebene, die T beschreibt.

Definition
Eine **Ecke** eines Polyeder ist eine Fläche, welche nur aus einem Punkt besteht.

Abbildungen:
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige Menge.

$$\mathcal{G}S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)} \mid x \in S \right\}$$

$$\mathcal{D}\tilde{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \tilde{S} \right\}, \; \tilde{S} \subseteq \in \mathbb{R}^{(n+1)}.$$