$\{$1,0,-1$\}$-Matrizen

Jonas Ide

15.12.2009

Betrachtet man Optimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} \text{(GLP)}\ & min\ c^t x \\ \text{s.d.}\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{R}^n$, so stellt sich zumeist das Problem, dass die konvexe Hülle der zulässigen ganzzahligen Punkte nicht bekannt ist und daher nicht effizient mit herkömmlichen Optimierungsverfahren (wie Simplex- oder Innere-Punkte-Verfahren) gearbeitet werden kann.

Gilt allerdings $A \in \{1, 0, -1\}^{n \times m}$ (was wie gezeigt wird o.B.d.A. angenommen werden kann), so ergibt sich eine leichte Möglichkeit, den zulässigen Bereich 'ein bisschen zurecht zu stutzen'.
Dazu betrachtet man den Fall, dass zwei Ungleichungen $(a_{1\cdot}|b_1), (a_{2\cdot}|b_2) \in \{1, 0, -1\}^n \times \mathbb{Z}$ mit Gleichheit erfüllt sind. Unter bestimmten Voraussetzungen enthält der Schnitt dieser Gleichungen keinen ganzzahligen Punkt und kann durch Hinzufügen der Ungleichung $(\frac{a_{i_1\cdot}+a_{i_2\cdot}}{2} | \left\lfloor \frac{b_1+b_2}{2} \right\rfloor)$ abgeschnitten werden, ohne dabei die Struktur von A zu verletzen.

Durch folgenden Algorithmus ergeben sich somit einige zusätzliche Einschränkungen des zulässigen Bereiches, die im zweidimensionalen Fall sogar zu der konvexen Hülle der ganzzahligen Punkte führen.

Algorithmus 1:

Schritt 1: setze $k = n$
Schritt 2: für $v = 1, 2$ definiere $M_{n_v} =$
$\{(a_{i\cdot}|b_i) : a_{i\cdot}$ enthält genau n Nichtnulleinträge$, b \text{ mod } 2 \equiv v\}$
Schritt 3: für je zwei Ungleichungen $(a_{i_1\cdot}|b_1) \in M_{n_1}$ und $(a_{i_2\cdot}|b_2) \in M_{n_2}$
- für die $(a_{i_1 j} = 0 \Leftrightarrow a_{i_2 j} = 0)$ gilt - füge $(\frac{a_{i_1\cdot}+a_{i_2\cdot}}{2} | \left\lfloor \frac{b_1+b_2}{2} \right\rfloor)$ zu A hinzu.
Schritt 4: setze k=k-1, falls k=1: STOP
sonst gehe zu 2.