Ein szenarien-basierter Ansatz zur robusten Optimierung

Michael Hess

06.04.2010

Dieser Vortrag wird sich aus zwei Gebieten der Optimierung bedienen:

Auf der einen Seite wird die Standortplanungstheorie eingebunden, welche durch Entscheidungsprozesse zur Ermittlung eines neuen optimalen Standortes, unter Berücksichtigung bereits Existierender, geprägt wird. Auf der anderen Seite wird die robuste Optimierung mit einbezogen, eine Disziplin zur Untersuchung von Problemen, deren Charakteristika mit Unsicherheiten behaftet sind.

Die Idee wird nun sein, die Vielzahl von Ausprägungen, welche ein unsicheres Problem mit sich bringt, zu lösen und diese Lösungen unter Zuhilfenahme von Algorithmen aus der Standortplanung zu einer einzigen neuen Lösung zu verknüpfen. Die auf diesem Weg gewonnenen Ergebnisse werden im weiteren Verlauf untereinander und mit „traditionellen“ Werten aus der Optimierung, unter gewissen Aspekten, verglichen.

Definition. $P(A, b, c) =$

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ \text{s.d.} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

mit $(A, b, c) \in \mathbb{U}$ *wird als* unsicheres *lineares Programm mit Unsicherheitsmenge* $\mathbb{U}$ *bezeichnet. Zudem sei*

$$P_{\mathbb{U}} := \{P(A, b, c) : (A, b, c) \in \mathbb{U}\}$$

die Menge aller Programminstanzen.

In der Bachelorarbeit, auf die sich dieser Vortrag bezieht, bestanden die Unsicherheitsmengen aus abgeschlossenen Intervallen und bezogen sich ausschließlich auf b.

Untersucht wurden unsichere lineare Systeme aus dem ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$. Die Restriktionen dieser orientieren sich an Tangenten an einem Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und einem Radius von 100. Aus der Standortplanung wurden drei Algorithmen für Medianprobleme untersucht, denen entweder die 1-Norm, oder die eukldische, beziehungsweise quadrierte euklidische Norm zu Grunde liegen.

Es wurden insgesamt fünf Arten von Ergebnissen miteinander verglichen: Zunächst die drei Ergebnisse der Standortplanungsalgorithmen, weiterhin die streng robuste Lösung des unsicheren Problems $P_{\mathbb{U}}$, sowie die Lösung des Problems ohne die Berücksichtigung von Unsicherheitsmenge $\mathbb{U}$.

Definition.
Eine Lösung $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *von* $P(A,b)$ *heißt* streng robust *für* $P_{\mathbb{U}}$*, falls*

$$A\tilde{x} \leq b \quad \forall A, b \in \mathbb{U}$$

Im Folgenden ist exemplarisch eines der Systeme angegeben, wie sie untersucht wurden.

$$\begin{aligned}
\max \quad & 0.3898x_1 + 0.3x_2 \\
\text{s.d.} \quad & 0.9994 \cdot x_1 + 0.0342 \cdot x_2 \leq 100.0000 \\
& 0.9543x_1 + 0.2988x_2 \leq 100.0000 + \xi_1 \\
& 0.9089x_1 + 0.4169x_2 \leq 100.0000 \\
& 0.7795x_1 + 0.6264x_2 \leq 100.0000 + \xi_2 \\
& 0.0212x_1 + 0.9998x_2 \leq 100.0000 \\
& x_{1,2} \geq 0
\end{aligned}$$

mit $\mathbb{U} = \{\xi_1 = [-4.5061, 0.2468], \xi_2 = [0, 4.9845]\}$

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Art der untersuchten Systeme:

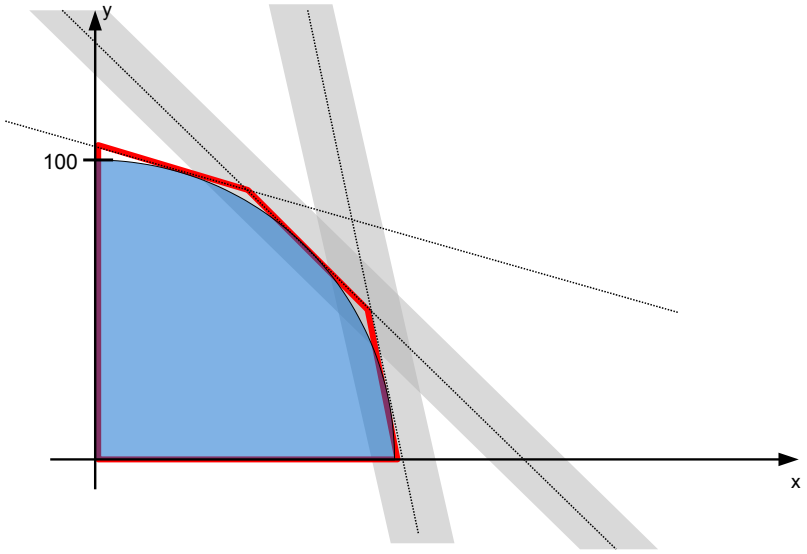

Abbildung 1: Das rotgezeichnete Polyeder beschreibt den zulässigen Bereich eines untersuchten Systems ohne Unsicherheit. Der graue Bereich veranschaulicht die Unsicherheit der jeweiligen Restriktion.