Wann darf man runden?

Niveaumengenansatz zur nichtlinearen ganzzahligen Programmierung

Ruth Hübner

13.4.2010

Ganzzahlige Optimierungsprobleme kommen in der Praxis häufig vor und sind leider oft komplizierter zu lösen als Probleme ohne die zusätzliche Einschränkung auf ausschließlich ganzzahlige Lösungen.

Sei

$$\begin{array}{lll} \text{(IP)} & \min & f(x) \\ & \text{s.d.} & x \in S \cap \mathbb{Z}^n \end{array}$$

ein ganzzahliges Optimierungsproblem mit $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann soll die **Relaxation** von (IP) im Folgenden stets das Problem

$$\begin{array}{lll} \text{(RP)} & \min & f(x) \\ & \text{s.d.} & x \in S \end{array}$$

meinen.

Im Allgemeinen kann man davon ausgehen, dass (RP) leichter zu lösen ist als (IP). Da die Lösung der Relaxation aber unzulässig für (IP) sein kann, stellt sich die Frage: Wie kann man aus einer Lösung von (RP) eine Lösung des ganzzahligen Optimierungsproblems bekommen? Praktisch wäre es, könnte man die einzelnen Koordinaten der Lösung einfach auf- oder abrunden. Allerdings weiß man nicht, ob die so generierte Lösung auch wirklich optimal für (IP) ist. Ziel meiner Diplomarbeit war es, diese Frage zu beantworten: In welchen Spezialfällen darf man einfach runden?

Dabei habe ich nur den Fall $S = \mathbb{R}^n$ betrachtet, das heißt Probleme ohne Nebenbedingungen. Ich möchte also Forderungen an $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ finden, so dass eine Lösung von (IP) in $\text{Round}(x) = \{y \in \mathbb{Z}^n : \ y_i \in \{\lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil\} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$ liegt, wenn x die Optimallösung von (RP) ist. Dabei stelle ich Bedingungen an die geometrische Form der Nebenbedingungen $N_{\leq}(z) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq z\}$ (für $z \in \mathbb{R}$): Die Sätze, die ich beweisen werde, sind von der folgenden Form:

Satz 1. *Sei x^* eine endliche Optimallösung von (RP), so dass die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : \ x \in \text{Round}(x^*)\}$$

von der Form $A(x^*)$ sind, so liegt eine optimale Lösung von (IP) in $\mathrm{Round}(x^*)$.

Dabei ist $A(x^*)$ eine geometrische Form (zum Beispiel ein Kreis mit Mittelpunkt x^*), die von x^* abhängt. Man sieht in dem Satz, dass nicht alle Niveaumengen diese Form haben müssen, sondern nur für $z \geq f(x^*)$ (also die nichtleeren Niveaumengen) und nur für $z \leq \widetilde{z}$ (d.h. nur bis die Niveaumengen groß genug sind, dass der erste Punkt aus $\mathrm{Round}(x^*)$ in ihnen liegt).

Das Vorgehen, um (IP) zu lösen, ist dann:

- Man bestimmt eine optimale Lösung x^* von (RP), die die Voraussetzungen erfüllt.
- Man berechnet die Zielfunktionswerte für alle $x \in \mathrm{Round}(x^*)$.
- Das $x \in \mathrm{Round}(x^*)$ mit dem kleinsten Zielfunktionswert ist die Optimallösung von (IP).

Der Vorteil von diesem Vorgehen ist, dass $\mathrm{Round}(x^*)$ nur endlich viele (höchstens 2^n) Punkte enthält und man Schritt 2 und 3 damit effizient durchführen kann.

Dabei untersuche ich in meiner Arbeit die folgenden drei Formen $A(x^*)$:
1. Fall: $A(x^*) = K_p(x^*, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ ||y - x^*||_p \leq r\}$, also den Fall, dass die Niveaumengen „Bälle“ (bezüglich einer beliebigen p-Norm) mit Mittelpunkt x^* sind.

2.Fall: $A(x^*)$ ist α-quasikreisförmig mit $\alpha = \min\limits_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{d(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \mathrm{Round}(x^*)) - d(x^*, \mathbb{Z}^n)\}$

Definition 1. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt α-quasikreisförmig mit Mittelpunkt x, wenn: es $r \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass $K(x, r) \subseteq M$ und $R \in \mathbb{R}^+$, so dass $M \subseteq K(x, R)$, wobei $R - r \leq \alpha$, für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Um dieses α zu bestimmen, muss man das folgende Optimierungsproblem lösen:

$$(P_\alpha) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{b(x) - a(x)\}$$

$$\text{Mit} \quad b(x) \quad \begin{array}{l} \min \ ||x - y||_2 \\ \text{s.d. } y \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathrm{Round}(x) \end{array} \quad \text{und} \quad a(x) \quad \begin{array}{l} \min \ ||x - y||_2 \\ \text{s.d. } y \in \mathbb{Z}^n \end{array} .$$

3. Fall: $A(x^*)$ ist cross-shaped bezüglich x^*:

Definition 2. Zu $x \in \mathbb{R}^n$ definiert man $\mathrm{box}_x(y)$ für $y \in \mathbb{R}^n$ als die Box, die durch die (maximal) 2^n Punkte

$$r_i = (r_{i1}, \ldots, r_{in}) \quad \text{mit} \quad r_{ij} \in \{x_j, y_j\} \ \forall j = 1, \ldots, n$$

begrenzt ist.
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **cross-shaped** bezüglich $x \in M$, wenn $\forall y \in M$ gilt: $\mathrm{box}_x(y) \subseteq M$.