Anwendungen des Prize Collecting Steiner Tree

Roland Ortmann

8. Juni 2010

1 Einleitung

Im heutigen Vortrag werden wir einen kleinen Einblick in verschiedene Anwendungsprobleme und deren Gestaltung als mathematisches Modell erhalten. Dies basiert auf dem Problem ein möglichst kostenoptimales Netzwerk zu erstellen, mit dem sich Wärme innerhalb eines Nahwärmenetzes verteilen lässt. Gelöst wurde dieses Problem durch die Anwendung eines Prize Collecting Steiner Tree. Basierend auf diesem Modell wird einerseits untersucht wie sich die (im Gegensatz zum ursprünglichen Modell) freie Wahl des Startknoten auf das Modell auswirkt und inwieweit sich ähnliche Modelle realisieren lassen. Um dies zu erreichen wird zuerst eine kleine Einführung über Graphentheorie und Netzwerkoptimierung gegeben, bevor auf weitere Ideen und ihre Umsetzbarkeit eingegangen wird.

2 Definitionen

2.1 Steinerbaumproblem

Das Steinerbaumproblem ist die Verallgemeinerung des minimalen Spannbaumes. Gegeben ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E, c)$, wobei E die Menge der Kanten, V die Menge der Knoten und T die Menge der Terminale, einer Teilmenge von V, ist. Außerdem gibt es eine Funktion $c(e_i) \to \mathbb{R}^+ : e_i \in E$ welche die Kanten mit positiven Gewichten versieht.

Gesucht ist nun der Teilgraph von G, welcher, bei möglicher Nutzung von Nicht-Terminalen, spannend bezüglich der Terminale ist und minimal.

2.2 Prize Collecting Steiner Tree

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E, c, p)$ wobei E,V und c wie beim Steinerbaumproblem definiert sind und $p(v_i) \to \mathbb{R}^+ : v_i \in V$ eine Funktion, welche den Knoten positive Gewichte zuordnet. Außerdem gibt es eine Startknoten r_0, welcher in jedem gesuchten Graph enthalten sein muss. Hierzu gibt es nun verschiedene Problemstellungen.

1. **Goemans-Williamson Minimization Problem** Gesucht ist hier der zusammenhängende Teilgraph $T = (V_T, E_T)$ von G, wobei $V_T \subseteq V$ und $E_T \subseteq E$,welcher die Funktion

$$GW(T) = \sum_{v \notin V_T} p(v) + \sum_{e \in E_T} c(e)$$

minimiert.

2. **Net Worth Maximization Problem** Gesucht ist hier der zusammenhängende Teilgraph $T = (V_T, E_T)$, welcher die Funktion

$$NW(T) = \sum_{v \in V_T} p(v) - \sum_{e \in E_T} c(e)$$

maximiert.

3. **Quota Problem** Gegeben ist hier zusätzlich noch eine Quote $Q > 0$. Gesucht ist nun der zusammenhängende Teilgraph $T = (V_T, E_T)$, welcher die Funktion

$$QP(T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$$

minimiert und wo

$$\sum_{v \in V_T} p(v) \geq Q$$

gilt.

4. **Budget Problem** Gegeben ist hier zusätzlich noch ein Budget $B > 0$. Gesucht ist nun der zusammenhängende Teilgraph $T = (V_T, E_T)$, welcher die Funktion

$$BP(T) = \sum_{v \in V_T} p(v)$$

maximiert und wo

$$\sum_{e \in E_T} c(e) \leq B$$

gilt.