Oberseminar Optimierung, Sommersemester 2012

# Ganzzahlige Programmierung mit Gröbnerbasen

J. Frederik Tietz

17. April 2012


### Zusammenfassung

Polynomringe und ihre Ideale spielen eine zentrale Rolle in der algebraischen Geometrie. Polynome über $k$ in $n$ Variablen definieren Funktionen auf dem affinen Raum $k^n$ und stellen so das Bindeglied zwischen Algebra und Geometrie dar. Zu einem polynomiellen Ideal gehört seine affine Varietät, die Menge, auf der seine Elemente identisch verschwinden. Die konkrete Berechnung von Varietäten und der verwandten algebraischen und geometrischen Objekte steht hierbei historisch eher im Hintergrund.

Für die Berechenbarkeit ist es eine entscheidende Anforderung, entscheiden zu können, ob ein gegebenes Polynom zu einem gegebenen Ideal gehört. Für lineare Ideale sowie für univariate Polynomringe existieren hierfür effiziente Algorithmen – namentlich Gauß-Elimination und der Euklidische Algorithmus. Unter Zuhilfenahme von Termordnungen, die das Problem der Ordnung der Monome im multivariaten Polynomring beheben, entwickelte Bruno Buchberger in den 1960er Jahren die Theorie der Gröbnerbasen, die das Idealzugehörigkeitsproblem nebst einer Vielzahl verwandter Probleme löst. Zentral hierbei ist der Buchberger-Algorithmus, durch den Gröbnerbasen berechenbar werden – allerdings mit schlechtestenfalls doppelt exponentieller Laufzeit. Dennoch liefern Buchbergers Arbeiten einen entscheidenden Baustein für das Feld der Algorithmischen Algebraischen Geometrie.

In einem Paper von 1991 stellen Conti und Traverso[1] ein Verfahren vor, mit dem ganzzahlige Optimierungsprobleme unter Zuhilfenahme von Gröbnerbasen gelöst werden können. Hierbei wird die Frage der Zulässigkeit eines Systems in ein Problem über die Bildmenge einer polynomialen Abbildung übersetzt, das sich mit Hilfe von Gröbnerbasen lösen lässt. Die Rolle der Zielfunktion wird von geeigneten Termordnungen übernommen. In der Folgezeit wurde das Verfahren verbessert, geometrisch interpretiert, implementiert und mit den Standardverfahren verglichen.

Im Vortrag wird in die Theorie der Gröbnerbasen eingeführt, um schließlich das Verfahren von Conti und Traverso vorstellen zu können. Des Weiteren wird ein Ansatz von Bertsimas et al.[2] präsentiert, der neue Ansätze für binäre ganzzahlige Optimierungsprobleme aufzeigt.


[1] P. Conti, C. Traverso (1991). *Buchberger Algorithm and Integer Programming*, Proceedings AAECC-9, (New Orleans), Springer Verlag LNCS 539, 130-139

[2] D. Bertsimas, G. Perakis, S. Tayur (2000). *A New Algebraic Geometry Algorithm for Integer Programming*, Management Science Vol. 46, No. 7, 999-1008