

Projektbasierte Übungen

Sommersemester 2008

Mathematik für Informatiker

Dipl.-Math. A. Eickhoff-Schachtebeck

Übung 1:

1. Eine Datenbank muss häufig neu sortiert werden, als Erfahrungswerte erhält man für die beiden Sortieralgorithmen in etwa den Aufwand in Abhängigkeit von der Zahl n der zu sortierenden Einträge:

- Bubblesort: $b_n := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1 + 3k)$ und
- Insertsort: $i_n := \sum_{k=1}^n (2 + 2k)$

Welches der beiden Verfahren ist für sehr große Datenbanken zu empfehlen? Berechnen Sie dazu den Grenzwert der Folge $(b_n/i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Projektbasierte Übungen

Sommersemester 2008

Mathematik für Informatiker

Till Baumann
Dipl.-Math. A. Eickhoff-Schachtebeck

Übung 1:

Wir beschäftigen uns in der folgenden Aufgabe mit der Darstellung von elementaren Funktionen im Computer.

1. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Exponentialfunktion. Naiv wäre eine Möglichkeit, $\exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ mittels der Definition der Exponentialfunktion, d.h. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ bis auf eine vorgegebene Genauigkeit anzugeben. Bis zu welchem Polynomgrad n müssen Sie $\frac{x^n}{n!}$ berechnen, um eine Genauigkeit auf 5 Nachkommastellen zu erhalten, mit jeweils $x \in \{0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2;\}$?
2. Informieren Sie sich über das sogenannte Horner-Schema und implementieren Sie mit dessen Hilfe die Auswertung des Taylorpolynoms vom Grad 6 in $x = 0$. Was sind die Vorteile der Verwendung des Horner-Schemas?
3. Geben Sie einen Programmcode für ein Programm an, das den Cosinus von $x \in \mathbb{R}$ mithilfe der Taylorreihe numerisch berechnet. Wie genau ist Ihr Programm?

Übung 2:

1. Da ein Computer nicht in der Lage ist, Wurzeln direkt zu berechnen, sondern immer nur numerisch annähern kann, benötigt man eine möglichst effektive Methode dafür. Solch ein effektives Verfahren zur Berechnung von Wurzeln am Computer ist die Heron'sche Folge, gegeben durch:

$$h_n = \frac{1}{2} \left(h_{n-1} + \frac{x}{h_{n-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N}, x > 0$$

Sie konvergiert für beliebigen Startwert $h_1 > 0$ gegen \sqrt{x} .

Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Aussage!

Anleitung:

- i) Betrachten Sie $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \right)$ mit einem beliebigen Startwert $a_1 > 0$, und zeigen Sie, dass sie konvergiert.

- ii) Bestimmen Sie den Grenzwert a .
 - iii) Betrachten Sie $h_n = \sqrt{x}a_n$.
2. Informieren Sie sich über das Newton-Verfahren, und zeigen Sie, dass die obige Berechnung von Wurzeln mit Heronschen Folgen eine Anwendung des Newton-Verfahrens ist.

PROJEKTBASIERTE ÜBUNGEN

MATHEMATIK FÜR GEOWISSENSCHAFTEN

Dipl. Math. Annika Eickhoff-Schachtebeck, Barbara Brandfass

Übung 1. In Koala Valley (Australien) ist es in diesem Sommer wieder sehr trocken. Am späten Nachmittag melden drei Ranger von ihren Beobachtungstürmen ein offenes Feuer, was sich schnell zu einem Waldbrand ausdehnen könnte. Die Beobachter sitzen in Quarrelpeak (relative Koordinaten zur Funkzentrale im Nationalpark: 5 km östlich, 4 km nördlich), Old Pine (4 km östlich und 4 km südlich) und Kangaroo Lodge (2 km östlich, 4 km südlich).

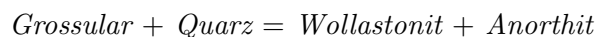
Ihre Peilungen zum Feuer lauten:

- Quarrelpeak: exakt SW
- Old Pine: $\alpha = 21,80141$ Grad West (geographisch)
- Kangaroo Lodge: exakt im Norden.

1. Erstellen Sie eine Skizze.
2. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es. Zu welchen Koordinaten soll die Leitstelle die Löschflugzeuge entsenden?
3. Kurze Zeit später glaubt auch der Commander in der Zentrale den Rauch des Feuers zu sehen. Seine Peilung lautet: exakt im Osten. Was ist von dieser Meldung zu halten?

Übung 2. Die Gesteinsmetamorphose ist die Umwandlung der mineralogischen Zusammensetzung eines Gesteins durch geänderte Temperatur- und/oder Druckbedingungen. Dabei entsteht ein metamorphes Gestein.

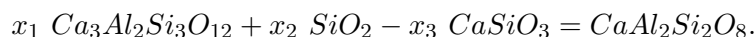
Wir interessieren uns für die metamorphe Reaktion



Die jeweiligen chemischen Formeln lauten $\text{Ca}_3\text{Al}_2\text{Si}_3\text{O}_{12}$ für Grossular, SiO_2 für Quarz, CaSiO_3 für Wollastonit und $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ für Anorthit.

Übungsabgabe bis zum .

Wir wollen nun klären, wieviele Moleküle der einzelnen Minerale jeweils an der Reaktion beteiligt sind, wenn wir davon ausgehen, dass nur ein Molekül Anorthit vorkommt. Gesucht sind also $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, so dass

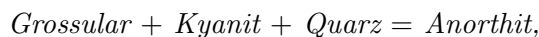


Eine Möglichkeit diese Gleichung zu lösen ist zunächst die Anzahl der in den Mineralen enthaltenen Oxide zu bestimmen, in diesem Fall Aluminiumoxid (Al_2O_3), Calciumoxid (CaO) und Siliciumdioxid (SiO_2), und mit dieser Information ein lineares Gleichungssystem aufzustellen:

	Grossular	Quartz	Wollastonit	Anorthit
Al_2O_3	$1x_1$	$+ 0x_2$	$+ 0x_3$	$= 1$
CaO	$3x_1$	$+ 0x_2$	$- 1x_3$	$= 1$
SiO_2	$3x_1$	$+ 1x_2$	$- 1x_3$	$= 2$

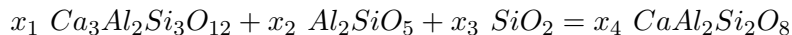
Berechnen Sie nun die Koeffizienten x_1, x_2, x_3 und geben Sie die vollständige Reaktionsgleichung an.

Übung 3. Wir betrachten nun eine weitere metamorphe Reaktion:



wobei die chemische Formel von Kyanit Al_2SiO_5 lautet.

Bestimmen Sie auch hier das Verhältnis der einzelnen Minerale, d.h. $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ mit



und geben Sie die vollständige Reaktionsgleichung an.

Beachten Sie, dass nur „ganze“ Moleküle, d.h. x_1, \dots, x_4 positive natürliche Zahlen zulassen sind.

Übung 4. *Isotope sind verschiedene Atomsorten des gleichen Elements, die sich durch die unterschiedliche Anzahl von Neutronen im Atomkern unterscheiden. Viele Elemente sind in der Natur als Isotopengemische bestimmter Zusammensetzung vorhanden. Die Analyse dieser Isotopen-Verhältnisse findet z.B. bei der Untersuchung von Meteoriten Anwendung.*

1. *Der Artikel auf der letzten Seite erschien am 15. April 2008 im Wissensmagazin Scinexx von Springer (<http://www.scinexx.de/wissen-aktuell-8090-2008-04-15.html>).*

Lesen Sie den Artikel aufmerksam durch. Das Isotopen-Verhältnis welchen Elements wird hier untersucht und worüber gibt es Aufschluss?

2. *In Meteoriten sind Edelgase stets die Mischung aus verschiedenen Komponenten unterschiedlichen Ursprungs, die jeweils durch eine bestimmte Element- und Isotopenzusammensetzung charakterisiert sind. Die Analyse dieser Edelgase ermöglicht es z.B. das Bestrahlungsalter des Meteoriten abzuschätzen. Das Bestrahlungsalter gibt die Zeitspanne an, seit der ein Stück meteoritische Materie nicht mehr im Innern eines größeren Himmelskörpers vor der kosmischen Strahlung geschützt war.*

Bei der Untersuchung des Orgueil-Meteoriten fand man ein Neongemisch, welches sich keiner der bekannten Komponenten zuordnen ließ. Jedes der bekannten Neon-Isotopen-Gemische enthält die Isotope Neon 20, Neon 21 und Neon 22 in einem Mengenverhältnis gemäß der folgenden Tabelle:

	<i>planetares Neongemisch A</i>	<i>solares Neongemisch B</i>	<i>kosmogenes Neongemisch C</i>	<i>unbekanntes Neongemisch U</i>
<i>Neon 20</i>	<i>8.2</i>	<i>12.5</i>	<i>0.9</i>	<i>4.2</i>
<i>Neon 21</i>	<i>0.03</i>	<i>0.04</i>	<i>0.91</i>	<i>0.04</i>
<i>Neon 22</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

Kann es sein, dass sich das unbekanntes Gemisch aus den Gemischen A, B und C zusammensetzt? Begründen Sie Ihre Antwort.



Neue Methode revolutioniert Meteoritenjagd

Osmium-Isotope ermöglichen Ermittlung von Häufigkeit und Größe von Einschlägen

Eine neue Methode könnte dazu beitragen, bisher unentdeckte Meteoriteneinschläge auf der Erde nachzuweisen. Wie amerikanische Geowissenschaftler jetzt in „Science“ berichten, konnten sie mithilfe des Verhältnisses von Isotopen des auf der Erde seltenen Elements Osmium in Meeressedimenten die chemischen Veränderungen durch einen Impakt rekonstruieren und daraus sogar auf die Größe des Himmelskörpers schließen.



Krater eines
Meteoriteneinschlags
© NASA/JSC

Auf dem Mond bleiben Meteoritenkrater über Millionen von Jahren erhalten, denn ihm fehlt eine Atmosphäre. Nicht so auf der Erde. Hier sorgen Erosion durch Witterungseinflüsse und die Vegetation dafür, dass die sichtbaren Spuren solcher Einschläge im Laufe der Zeit verschwinden. Dadurch ist es heute sehr schwer herauszufinden, wann im Laufe der Erdgeschichte ein Meteorit eingeschlagen hat und auch, wie groß er war.

Osmium als Indiz

Jetzt aber hat François Paquay, ein Geologe der Universität von Hawaii in Manoa (UHM) eine neue Methode entwickelt, die diese Informationen aus der Isotopenzusammensetzung von Meeressedimenten gewinnt. Schlüssel dafür ist die Konzentration von Varianten des Elements Osmium. Himmelskörper, die auf die Erde treffen, tragen ein anderes Verhältnis von

Osmium-Isotopen in sich als die Gesteine und Ablagerungen auf der Erde.

„Wenn ein Meteorit verdampft, transportiert dies einen Schwung dieses seltenen Elements in die Region, in der er landet“, erklärt Rodey Batiza von der Abteilung Meeresforschung der amerikanischen Wissenschaftsorganisation NSF. „Das Osmium mischt sich mit dem Meerwasser und Spuren dieser impaktbedingten chemischen Veränderungen werden in den Tiefseesedimenten konserviert.“

Einschläge verändern Isotopenverhältnis

Paquay analysierte Bohrkern aus zwei Probenstellen des Internationalen Tiefborhprogramms ODP, eine im äquatorialen Pazifik und eine nahe der Spitze Südafrikas. Er maß insbesondere die Osmium-Isotopenverhältnisse während des späten Eozän, dem Zeitalter, das vor rund 55,8 Millionen Jahren begann und vor 33,9 Millionen Jahren endete. Von dieser erdgeschichtlichen Phase ist bekannt, dass sich hier mehrere große Meteoriteneinschläge ereigneten. Tatsächlich konnte die Wissenschaftler entsprechende Verschiebungen in den Osmium-Isotopenverhältnissen feststellen.

„Wir wissen, dass es in dieser Zeit zwei große Einschläge gab“, erklärt Paquay. „Jetzt können einen Einblick gewinnen darin, wie sich die Ozeane während dieser Einschläge verhielten. Jetzt können wir uns mit dieser Methode auch andere Impakt-Ereignisse anschauen, sowohl größere als auch kleinere.“

Dino-Killer kleiner als angenommen?

Nach Ansicht der Wissenschaftler könnte diese Methode eine gute Ergänzung zur bisher üblichen Suche nach einer so genannten Iridium-Anomalie darstellen. Diese ist eine Veränderung in der Konzentration des ebenfalls auf der Erde sehr seltenen, aber in Himmelskörpern häufigeren Elements Iridium, die ebenfalls als Indiz für einen Einschlag gilt. Die Osmium-Methode könnte dazu beitragen, auch bisher unentdeckte Einschläge aufzuspüren.

Die Forscher testeten das neue Verfahren auch an dem vielleicht bekanntesten Meteoriteneinschlag der Erdgeschichte: dem Impakt am Ende der Kreidezeit, der die Ära der Dinosaurier beendete. Für diesen Meteoriten berechneten sie einen Durchmesser von vier bis sechs Kilometern. Das allerdings ist ein kleinerer Wert als der bisher geschätzte. Astronomen und Geologen gingen bisher von zehn bis 15 Kilometern Größe aus. Welche Schätzung recht hat, müssen nun weitere Untersuchungen zeigen.

(NPO, National Science Foundation (NSF), 15.04.2008)



PROJEKTBASIERTE ÜBUNGEN

MATHEMATIK FÜR GEOWISSENSCHAFTEN

Annika Eickhoff-Schachtebeck, Barbara Brandfass

Übung 1. Sedimente entstehen durch Ablagerung von Material an Land und im Meer. Aufgrund ihrer charakteristischen Schichtung, die durch Materialwechsel entsteht, werden sie auch Schichtgesteine genannt.

Ein Sediment bestehe aus n Schichten und enthalte m Gesteinsarten. Der Anteil der j -ten Gesteinsart in der i -ten Schicht sei a_{ij} . Jede Gesteinsart enthalte l Isotope eines Elements. Der relative Anteil des k -ten Isotops in der j -ten Gesteinsart sei b_{jk} .

1. Begründen Sie, dass sich der relative prozentuale Anteil c_{ik} des k -ten Isotops in der i -ten Sedimentschicht durch Matrizenmultiplikation $A \cdot B = C$ mit $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ und $C = (c_{ik})$ berechnen lässt.
2. Welche Dimensionen haben die Matrizen A , B und C ?
3. Ein Sediment bestehe aus 2 Schichten und enthalte 3 Gesteinsarten mit folgenden Anteilen:

	Gestein 1	Gestein 2	Gestein 3
Schicht 1	0,2	0,3	0,5
Schicht 2	0,3	0,5	0,2

Jede Gesteinsart enthalte die 4 Bleisotope in relativer prozentualer Häufigkeit gemäß:

	Pb^{204}	Pb^{206}	Pb^{207}	Pb^{208}
Gestein 1	2	20	21	57
Gestein 2	3	18	23	56
Gestein 3	1	24	25	50

Bestimmen Sie die Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{jk})$. Berechnen Sie die relativen prozentualen Anteile der einzelnen Isotope in den beiden Sedimentschichten.

Übung 2. Tektonische Prozesse in der Erdkruste führen zu Brüchen, Faltungen und Überschiebungen von Gesteinseinheiten. Die Verformungen, denen das Gestein dabei unterliegt, lassen sich lokal durch Deformationsmatrizen beschreiben. Zur Vereinfachung betrachten wir hier nur einen Querschnitt eines Gesteins, d.h. den zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 .

Untersuchen Sie die Deformation, die durch folgende Abbildungsmatrix gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gewinnen Sie einen Eindruck von der Verformung des Gesteins, indem Sie

1. die Determinante von A berechnen. Was bedeutet das Ergebnis in Bezug auf die Größe einer Fläche nach der Deformation?
2. A auf Eigenwerte und Eigenvektoren untersuchen
3. eine Skizze anfertigen, in der Sie das Quadrat mit den Eckpunkten

$$(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$$

sowie das Bild des Quadrats unter der Deformation einzeichnen. Zeichnen Sie auch die Eigenvektoren vor und nach der Deformation ein.

Übung 3. Metamorphe Gesteine zeigen fast immer ein mehr oder weniger deutliches Trennflächengefüge (Schieferung), das auf Deformation zurückzuführen ist. Es entsteht durch Rotation der vorhandenen plattigen (z.B. Glimmer) und länglichen Minerale (z.B. Amphibole) bei einfacher Scherung und reiner Scherung und durch bevorzugtes Wachstum der neu gebildeten Minerale in Richtung des minimalen Stresses.

Ebene Scherdeformationen lassen sich durch Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (einfache Scherung)}$$

und

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \text{ (reine Scherung)}$$

beschreiben.

1. Veranschaulichen Sie den Effekt von einfacher und reiner Scherung für

$$k = 2 \text{ und } \gamma = 1,5$$

in einer Skizze, in der Sie das Quadrat mit den Eckpunkten

$$(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$$

sowie das Bild des Quadrats unter den Scherdeformationen einzeichnen.

2. Bewirkt einfache bzw. reine Scherung eine Änderung der Flächengröße? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Die reine Scherung ist in der Natur praktisch nie verwirklicht. Meistens wirken reine Scherung und einfache Scherung zusammen und überlagern sich. Beweisen oder widerlegen Sie:
Wird Gestein von einfacher Scherung gefolgt von reiner Scherung verformt ergibt sich die selbe Deformation wie bei Verformung durch reine Scherung gefolgt von einfacher Scherung.