Big Cube Small Cube Methode für ganzzahlige Standortprobleme

Melanie Walter

01.11.2011

Bei Standortproblemen geht es im Allgemeinen darum, zu gegebenen Standorten einen oder mehrere neue Standorte optimal zu platzieren. Ein einfaches Beipspiele hierfür ist die Suche eines optimalen Standortes für ein Lager, von dem aus n gegebene Warenhäuser beliefert werden sollen. Dabei soll die Summe der Entfernungen minimiert werden.
Die BCSC-Methode liefert einen Algorithmus zur Berechnung von optimalen Standorten und soll so angepasst werden, dass wir sie auf ganzzahlige Standortprobleme anwenden können.

1 Standortprobleme

1.1 Notation

- bereits existierende Standorte:

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A_i := (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}),\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}$$

- dazugehörige Gewichtung:

$$\{w_1, \ldots, w_n\},\ w_i > 0\ \forall\ i$$

- Menge der bereits existierenden Standorte:

$$\mathcal{A} := \{A_1, \ldots, A_n\},\ n \in \mathbb{N}$$

- Menge der gesuchten optimalen Standorte:

$$Opt^* := \{x_{opt1}, \ldots, x_{optN}\} \text{ mit } x_{opti} := (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \in \mathbb{R}^3$$

  Wir sprechen dann von einem N-Standortproblem.

1.2 Klassifikationsschema

- neue Standorte / Art des Problems / Besonderheiten / Entfernung / Zielfunktion
- z.B. ein neuer Standort / $\mathbb{R}^3$ / Gewichtung $w = 1\ \forall$ Standorte / l_2 / $\sum$

2 BCSC

- Minimierung einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Zuässige Menge ist ein (kompakter) Quader C.
- Die BCSC-Methode findet eine optimale Lösung $x_{opt} \in \mathbb{R}^3$ mit der vorgegebenen Genauigkeit von $\varepsilon > 0$.

2.1 Definitionen

Notation (Quader)

Die Menge

$$C := [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \times [\underline{x}_2, \overline{x}_2] \times [\underline{x}_3, \overline{x}_3] \subset \mathbb{R}^3$$

definiert einen achsenparallelen Quader C mit den Eckpunkten

$$\begin{aligned} E_1 &= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) & E_5 &= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \overline{x}_3) \\ E_2 &= (\overline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) & E_6 &= (\overline{x}_1, \underline{x}_2, \overline{x}_3) \\ E_3 &= (\underline{x}_1, \overline{x}_2, \underline{x}_3) & E_7 &= (\underline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \\ E_4 &= (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \underline{x}_3) & E_8 &= (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \end{aligned}$$

und dem Mittelpunkt

$$m(C) = \left(\frac{1}{2} \cdot (\underline{x}_1 + \overline{x}_1),\ \frac{1}{2} \cdot (\underline{x}_2 + \overline{x}_2),\ \frac{1}{2} \cdot (\underline{x}_3 + \overline{x}_3) \right).$$

Definition (Lower Bound)

Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und ein (kompakter) Quader $C \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Eine Lower Bound LB des Quaders C ist eine möglichst große reelle Zahl, s.d.

$$f(x_1, x_2, x_3) \geq LB \ \ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in C.$$

Wir schreiben $LB(C)$.

2.2 Algorithmus

Input: Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und Quader $C \subset \mathbb{R}^3$.

Phase 1: Initialisierung

1.1 Lege eine Liste $\mathcal{C}$ von Quadern an und initialisiere sie mit dem Startquader, also $\mathcal{C} = \{C\}$.

1.2 Bestimme die Upper Bound $UB := f(m(C))$ und setze $x_{opt} = m(C)$.

1.3 Ordne dem Quader C eine Lower Bound $LB(C)$ zu.

Phase 2: Branch-and-Bound

2.1 **Auswahlregel**
Suche die kleinste Lower Bound LB_{min} aller Quader C' aus $\mathcal{C}$.

2.2 **Abbruchkriterium**
Gilt $LB_{min} + \varepsilon \cdot |LB_{min}| \geq UB$, Stop!

- x_{opt} ist eine optimale Lösung
- $f(x_{opt}) = UB$ (Zielfunktionswert mit der Genauigkeit ε)

2.3 **Teilungsregel**
Wähle $C' \in \mathcal{C}$ mit $LB(C') = LB_{min}$ und teile C' in acht kongruente kleinere Quader.

2.4 Wähle $\tilde{m}$ aus den Mittelpunkten der neuen Quader, s.d. $f(\tilde{m}) = min\{f(m(C_1)), \ldots, f(m(C_8))\}$.
Gilt $f(\tilde{m}) < UB$, setze $UB = f(\tilde{m})$ und $x_{opt} = \tilde{m}$.

2.5 Berechne zu jedem der acht neuen Quader $C_1, \ldots, C_8$ eine Lower Bound.

2.6 Füge die acht neuen Quader der Liste $\mathcal{C}$ hinzu und entferne den alten, größeren Quader C'.

2.7 **Wegfalltest**
Entferne alle Quader $C' \in \mathcal{C}$, die $LB(C') + \varepsilon \cdot |LB(C')| > UB$ erfüllen, aus der Liste.

2.8 Wende weitere Wegfalltests an.

2.9 Gehe zurück zu Schritt 2.1. (Auswahlregel).

2.3 Anpassung an ganzzahlige Probleme

1.1 Wir wählen als Startquader den kleinsten achsenparallelen Quader mit ganzzahligen Eckpunkten, der alle gegebenen Standorte enthält.

1.2 Wir setzen $UB = m'(C)$, wobei $m'(C)$ der auf ganzzahlige Komponenten gerundete Mittelpunkt ist.

2.3 **Teilungsregel**
Wir teilen den Quader in acht disjunkte kleinere Quader, die jeweils ganzzahlige Eckpunkte haben.

2.8 **weitere Wegfalltests**

- Entferne alle Quader C, die keinen ganzzahligen Punkt enthalten, aus der Liste.
- Sind bei einem Quader C nur noch die Eckpunkte ganzzahlig, teste für $i = 1, \ldots, 8$:
  Gilt $f(E_i) < UB$, setze $UB = f(E_i)$ und $x_{opt} = E_i$.
  Entferne C anschließend aus der Liste.
- Es müssen jeweils nur die neuen Quader getestet werden.